Διάλεξη 4η

26/03/2020

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Γενίκευση σε τρεις διαστάσεις: Η φυσική σημασία των μεγεθών παραμένει η ίδια. Ορίζουμε πλέον ως

- όγκο: $V = \iiint_D dV$.
- Μάζα $= m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dV$, ρ: πυκνότητα

Πρώτες ροπές και κέντρο μάζας:

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho\,dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\rho\,dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z\rho\,dV$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Ροπές αδράνειας (δεύτερες ροπές)

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\rho\,dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\rho\,dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\rho\,dV$$

και ροπή αδράνειας ως προς ευθεία L,

$$I_L = \iiint_D r^2 \rho\,dV,$$ r: η απόσταση του (x,y,z) από την ευθεία L.

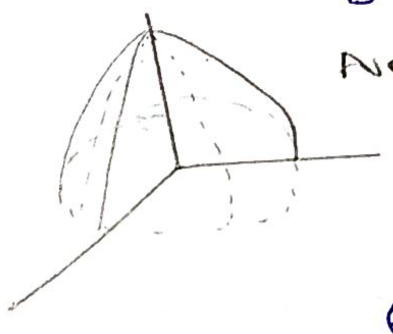
Παρατήρηση: Σε περίπτωση που έχουμε ελατήρια, λέγεται υπόψη η ράβδος, δηλαδή σύρματα "μονοδιάστατα" τα οποία αντικαθίστανται από επικαμπύλια.

Παράδειγμα: Βρείτε το κέντρο μάζας στερεού σταθερής πυκνότητας ρ, που φράσσεται από τον κυκλικό δίσκο $\underbrace{\{x^2+y^2 \le 4,\ z=0\}}_{R}$ και το παραβολοειδές: $z = 4 - x^2 - y^2$.

Λύση

Η (*) συμμετρία προβλέπει ότι $\bar{x}=\bar{y}=0$ (το δείχνω)

Έτσι έχω $m = \iiint_D \rho\, dV = \rho \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} dz\, dy\, dx$ (**)



Ανάλογα σε ποιον άξονα βρισκόμαστε είναι τα $z=4-x^2$ ή $z=4-y^2$ παραβολές.

Έχω λοιπόν $m = \iint_R \rho(4-x^2-y^2)\, dy\, dx$ (1)

(*) Η κυκλική συμμετρία προβλέπει ότι $\bar{x}=\bar{y}=0$ (στο παραπάνω σχήμα) στο κέντρο του δίσκου $(0,0)$ (στο παραπάνω σχήμα). Προβλέπεται ότι $\bar{x}=\bar{y}=0$. Τώρα θα υπολογίσω μάζα. Η μάζα του ΔΕΝ μπορεί να είναι μηδέν.

(**): Τα άκρα είναι 0 και $4-x^2-y^2$ διότι στο z και κάτω σωστά το 0 και "βγαίνοντας" από πάνω σωστά το παραβολοειδές.

Άρα φτάσω στη σχέση (1) παρατηρώ ότι θέλω πολικές συντεταγμένες. Έχω κυκλικό δίσκο $\Rightarrow$

Ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος είναι αυτός της βάσης με ακτίνα 2.

(1) $\Rightarrow$ $m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho(4-r^2)\, r\, dr\, d\theta = 8\pi\rho$.

$$M_{xy} = \iiint_D \rho z\, dV = \iint_R \rho \frac{z^2}{2}\Big|_0^{4-x^2-y^2} dy\, dx$$

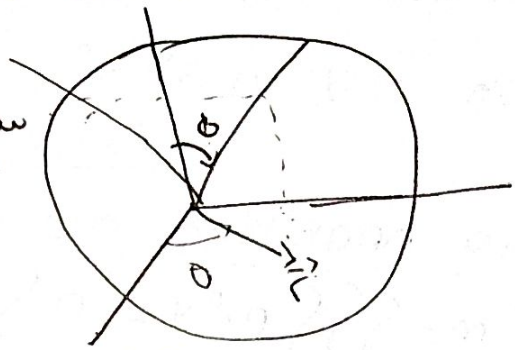
$$= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)^2\, r\, dr\, d\theta = \frac{32\pi}{3}\rho.$$

Παράδειγμα: Το κέντρο μάζας ενός παγωτού χωνάκι.

Θεωρούμε το χωρίο D που αποκόπτεται από την σφαίρα $r \leq 1$, ο κώνος $\phi = \pi/3$. Έστω ότι η πυκνότητα μάζας είναι σταθερή.

-> προβολές και σχήματα ίσως όχι για αίτιν-2

-> δεν χρειάζεται σε καρτεσιανές.



$$m = \iiint_D \rho \, dV = \rho \iiint r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta.$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta.$$

Πώς προκύπτουν οι όροι και τα άκρα;
Το r και το δίνει ; ακτίνα σφαίρας: $r \leq 1$
Το θ και δίνει τον κύκλο άρα $(0, 2\pi)$
Το φ είναι ο κώνος άρα $(0, \pi/3)$ } άκρα.

Άρα έχω ολοκλήρωμα (τριπλό) με σταθερά άκρα. Άρα μπορώ να το σπάσω και να υπολογίσω το κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά.

Άρα $$m = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \sin\phi \, d\phi \int_0^1 r^2 \, dr$$

$$= \rho \, 2\pi \left(-\cos\phi\right)_0^{\pi/3} \frac{1}{3} = \frac{\pi\rho}{3}.$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho \, dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r\sin\phi\cos\theta \, r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\pi/3} \sin^2\phi \, d\phi \int_0^1 r^3 \, dr = 0$$

$M_{xz} = 0$ (λόγω συμμετρίας)

$$M_{xy} = \iiint_D z\,\rho\, dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r \cos\phi \, r^2 \sin\phi \, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi\rho \int_0^{\pi/3} \sin\phi \cos\phi \, d\phi \int_0^1 r^3 \, dr$$

$$= 2\pi\rho \left(\frac{\sin^2\phi}{2} \right)\Big|_0^{\pi/3} \cdot \frac{1}{3} = \pi\rho \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi\rho}{4}.$$

Δηλαδή $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{\pi\rho/4}{\pi\rho/3}\right) = (0, 0, 3/4)$

Παρατήρηση: Πως θα ήταν το ολοκλήρωμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες;

$$\iiint_D dV = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{-\sqrt{3/4 - x^2}}^{\sqrt{3/4 - x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dy\, dz.$$

$x = r\sin\phi\cos\theta$

$y = r\sin\phi\sin\theta$

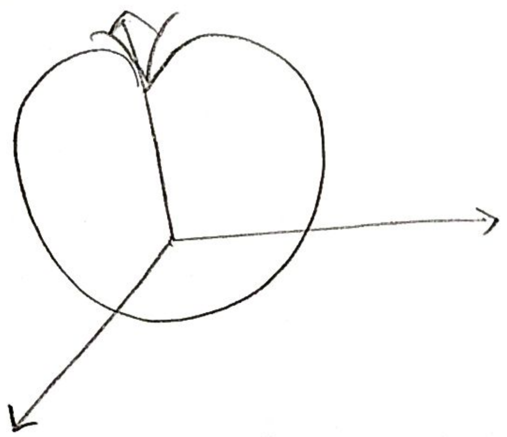
$z = r\cos\phi$

Για $r=1,\ \phi = \pi/3$: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{3}/2 \sin\theta \end{cases}$ άρα $x^2+y^2 = 3/4$

Το κάτω άκρο: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} r\cos\theta \\ y = \sqrt{3}/2\, r\sin\theta \\ z = r \cdot 1/2 \end{cases}$ $x^2+y^2 = \frac{3}{4}r^2$, $r = 2z$, $z^2 = \frac{1}{3}(x^2+y^2)$.

Παράδειγμα:

Ροπή αδράνειας ενός μήλου. Θέλω να βρω την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z ενός στερεού σώματος με $\rho = 1$ (πυκνότητα $=1$) που περικλείεται από την επιφάνεια $r = 1-\cos\phi$.



$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi} (x^2+y^2)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos} (r\sin\phi)^2 r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\phi \int_0^{1-\cos\phi} r^4\, dr\, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\phi\, \frac{1}{5}(1-\cos\phi)^5\, d\phi =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi} \sin^3\phi\, (1-\cos\phi)^5\, d\phi$$

dio $u = 1 - \cos\theta$

$du = \sin\theta \, d\theta$

$$\frac{2\pi}{5} \int_0^2 \sin^2\theta \, u^5 \, du$$

$\cos\theta = 1 - u$

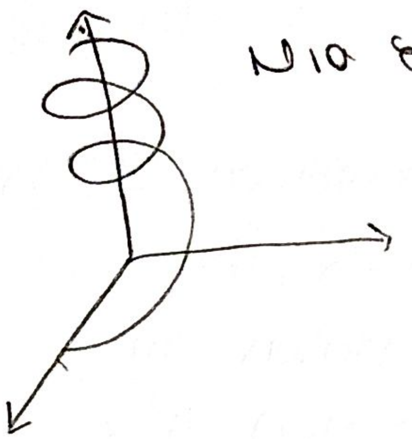
$$\frac{2\pi}{5} \int_0^2 (1 - \cos^2\theta) u^5 \, du$$

$\cos^2\theta = u^2 + 1 - 2u$

$$= \frac{2\pi}{5} \int_0^2 (-u^2 + 2u) u^5 \, du = \frac{64\pi}{35}$$

Παράδειγμα: Ένα ελατήριο περιγράφεται από την ελικοειδή καμπύλη:

$$\vec{r}(t) = \cos(4t)\hat{i} + \sin(4t)\hat{j} + t\hat{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



Μια έλικα είναι ένας "ανεκπλήρωτος" κύκλος.

(το z μεταβάλλεται προς τα πάνω και δεν μπορώ να κλείσω τον κύκλο)

Αν $\rho = 1$ η πυκνότητα μάζα του

Η μάζα του ελατηρίου είναι $m = \int_C \rho(x,y,z)\,ds$.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα γνωρίζουμε ότι

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow s = \int_a^t |\vec{v}|\,dt$ άρα

$$m = \int_C \rho |\vec{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,dt = 2\pi\sqrt{17}.$$

$$M_{yz} = \int_C x\rho\,ds = \int_0^{2\pi} \cos(4t)\sqrt{17}\,dt = 0$$

$$M_{xz} = 0$$

$$M_{xy} = \int_C z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{17}\,dt = 2\pi^2\sqrt{17}$$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = 0$

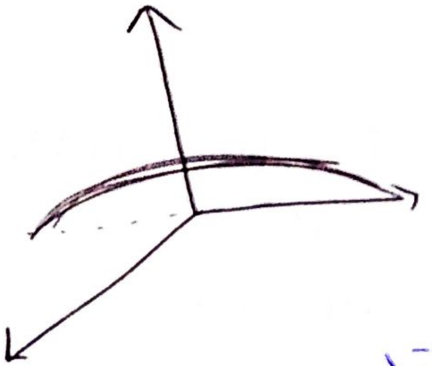
$\bar{z} = \pi$

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\sqrt{17}\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2(4t)+\sin^2(4t)\right)\sqrt{17}\, dt$$

$$= 2\pi\sqrt{17}.$$

Ακτίνα αδρανείας: $R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = 1$

Παράδειγμα: Ένα μεταλλικό τόξο κινείται επί της καμπύλης ημικυκλίου $y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, στο επίπεδο yz. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του αν η πυκνότητα μάζας είναι $\rho(x,y,z) = 2-z$



Η παραμετρική καμπύλη είναι $\vec{r}(t) = 0\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \sin t\,\hat{k}$, $0 \leq t \leq \pi$. ($z \geq 0$)

Τότε $|\vec{v}(t)| = \sqrt{0+(-\sin t)^2+\cos^2 t} = 1$. Άρα

$$m = \int_C (2-z)\,ds = \int_0^{\pi} (2-\sin t)\,dt = 2\pi-2.$$

$$M_{yz} = \int_C x(2-z)\,ds = 0$$

$$M_{xz} = \int_C y(2-z)\,ds = \int_0^{\pi} \cos t\,(2-\sin t)\,dt = 0$$

$$M_{xy} = \int_C z(2-z)\,ds = \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin^2 t)\,dt = \frac{8-\pi}{2}$$

Παρατήρηση: Χρήσιμες τριγωνομετρικές ιδιότητες.

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \cos^2 t - \sin^2 t &= \cos(2t) \\ 2\sin t \cos t &= \sin(2t) \end{aligned}\right\} \sin^2 t = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2t)\right]$$

Δηλαδή $\bar{x} = 0, \ \bar{y} = 0, \ \bar{z} = \dfrac{8-\pi}{4\pi-4} \approx 0{,}57$.